学校编号： 10384 分类号： ______ 密级： ______
学 号： 19020060153156 UDC: ____________

厦 门 大 学
博 士 学 位 论 文

Abel 范畴的 Recollement 与模范畴的 Recollement 的 Koenig 定理

Recollements of Abelian Categories and Koenig's Theorem of Recollement of Module Categories

王敏雄

指导教师姓名：林亚南 教 授
专 业 名 称：基 础 数 学

论文提交日期： 2010 年 04 月
论文答辩日期： 2010 年 06 月
学位授予日期： 2010 年 月

答辩委员会主席： ______
评 阅 人： ______

2010 年 04 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为(　　　　　　　　　　　　)课题(组)的研究成果，获得(　　　　　　　)课题(组)经费或实验室的资助，在(　　　　　　　)实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。)

声明人(签名):

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘　要

1982 年, Beilinson, Bernstein 和 Deligne 在研究奇异空间和 perverse sheaves 时首先引入三角范畴 recollement 的概念， 1988 年， Cline, Parshall 和 Scott 将三角范畴 recollement 的概念应用到代数的研究. 接着， MacPherson 和 Vilonen 为了直观的刻画 perverse sheaves 的结构，构造了一个 Abel 范畴的 recollement. 1991 年， Koenig 引入偏倾斜复形，给出环 A 的上有界导出范畴允许有关于环 B 和环 C 的上有界导出范畴的 recollement 的一个充分必要条件，推广了 Rickard 定理. 如今， Abel 范畴的 recollement 和三角范畴的 recollement 已经成为研究奇异空间几何、代数表示论、环论、多项式函数理论、拓扑空间理论等的重要工具及研究对象. 本学位论文研究了 Abel 范畴的 recollement 的若干问题. 全文共分成五部分.

前言部分介绍与本论文有关的研究发展概况，阐述论文的背景和思路.

第一章是预备知识，回顾了一些与论文有关的基本概念与基本性质.

第二章给出了两种从三角范畴的 recollement 构造 Abel 范畴的拟 recollement 的方法. 证明了：设三角范畴 $\mathcal{D}$ 允许关于三角范畴 $\mathcal{D}'$ 和三角范畴 $\mathcal{D}''$ 的 recollement. 若 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{D}$ 的 cluster- 倾斜子范畴, 且满足 $i_*i^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}, j_*j^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$. 则 Abel 范畴 $\mathcal{D}/\mathcal{T}$ 允许关于 Abel 范畴 $\mathcal{D}'/i^*(\mathcal{T})$ 和 $\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})$ 的拟 recollement. 另一种方法是从三角范畴的 recollement 出发, 构造了定义在对应的三角范畴上的函子范畴的 Abel 子范畴的拟 recollement.

第三章从两个 Abel 范畴的拟 recollement 构造了一个 Comma 范畴的拟 recollement.

第四章研究了模范畴的 recollement 的判别, 给出环 A 上的模范畴允许有关于环 B 上的模范畴和环 C 上的模范畴的 recollement 的一个充分必要条件，得到了模范畴版本的 Koenig 定理. 并给出了它的两个应用，一个是给出了 Morita 等

价定理的新的证明方法，另一个应用是从 recollement 的观点来看三角矩阵环，证明了模范畴的 recollement 作为模范畴的“粘合”与三角矩阵环作为环的“粘合”是协调的.

关键词 Abel 范畴的 recollement; 三角范畴的 recollement; Comma 范畴; cluster- 倾斜子范畴； Koenig 定理

Abstract

Beilinson, Bernstein and Deligne first introduced the notion of recollement of triangulated categories in their study of geometry of singular spaces in 1982, and has been studied in an algebraic setting by Cline, Parshall and Scott. A fundamental example of recollement of abelian categories is due to MacPherson and Vilonen. It first appeared as an inductive step in the construction of perverse sheaves. In 1991, Koenig introduced the notion of partial tilting complex and gave a precise criterion for the existence of a recollement of the derived categories of rings, generalizing Rickard's theorem. Recollements are important in geometry of singular spaces, in representation theory, in ring theory, in polynomial functors theory and in topological space theory.

This dissertation concentrates on recollements of abelian categories. It includes five parts altogether.

In the preface, we give a brief introduction of the background and recent developments related to this dissertation, and make a systemic exposition of our main results.

In the first chapter, we recall some foundamentary concepts and basic properties relevant to this dissertation.

In the second chapter, we provide two methods to construct Abelian quasi-recollements from recollement of triangulated categories. Assume that triangulated category $\mathcal{D}$ admits a recollement relative to triangulated category $\mathcal{D}'$ and triangulated category $\mathcal{D}''$. If $\mathcal{T}$ is a cluster tilting subcategory of $\mathcal{D}$ satisfies $i_*i^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}, j_*j^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$. Then abelian category $\mathcal{D}/\mathcal{T}$ admits a quasi-recollement relative to abelian categories $\mathcal{D}'/i^*(\mathcal{T})$ and $\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})$. And we construct quasi-recollement of Abelian categories from abelian subcategories of functor categories of triangulated categories corresponding recollement.

In the third chapter, we construct quasi-recollement of comma categories from two known quasi-recollements of Abelian categories.

In the fourth chapter, We give the Koenig's theorem of the version of module category, namely a necessary and sufficient condition for the existence of a recollement of modules categories, and give its two applications in this paper. One is to give a new proof of Morita's equivalent theorem and the other is to describe a triangular matrix ring from the view of recollement, which means that a triangular matrix ring as the gluing of rings is compatible with a recollement as the gluing of module categories.

Key words recollement of Abelian categories; recollement of triangulated categories; Comma category; cluster-tilting subcategory; Koenig's theorem

目　录

中文摘要 I
英文摘要 III
前言 1
第一章　预备知识 11
§1.1 Abel 范畴的 recollement 11
§1.2 三角范畴的 recollement 15
第二章　从三角范畴的 recollement 到 Abel 范畴的拟 recollement 20
§2.1 三角范畴的 Abel 商范畴 20
§2.2 三角范畴的 Abel 商范畴的拟 recollement 22
§2.3 范畴 $A(\mathcal{S})$ 的拟 recollement 28
第三章　Comma 范畴的拟 recollement 31
§3.1 Comma 范畴 31
§3.2 Comma 范畴的拟 recollement 33
第四章　模范畴的 recollement 的 Koenig 定理 37
§4.1 模范畴的 recollement 的 Koenig 定理 37
§4.2 在 Morita 等价及三角矩阵环应用 43
参考文献 45
作者在攻读博士学位期间发表和完成的论文 55
致谢 57

Contents

Abstract (in Chinese) I
Abstract (in English) III
Preface 1
Chapter 1 Definitions and preliminaries 11
§1.1 Recollement of abelian categories 11
§1.2 Recollement of triangulated categories 15
Chapter 2 From recollement of triangulated categories to quasi-recollement of abelian categoriess 20
§2.1 Abelian quotient category of triangulated category 20
§2.2 Quasi-recollement of abelian quotient category of triangulated category 22
§2.2 Quasi-recollement of category $A(\mathcal{S})$ 28
Chapter 3 Quasi-recollement of comma categories 31
§3.1 Comma category 31
§3.2 Quasi-recollement of comma categories 33
Chapter 4 Koenig's theorem of Recollement of module categories 37
§4.1 Koenig's theorem of Recollement of module categories 37
§4.2 Application to Morita's equivalent theorem and triangular matrix ring 43
References 45
Papers published and finished by the author during 2006.9-2010.4 55
Acknowledgements 57

前言

0.1 Abel 范畴和三角范畴

Abel 范畴和三角范畴是同调代数中两个基本的代数结构. Abel 范畴是研究同调代数的重要范畴. Abel 范畴的概念由 MacLane 在文 [89] 中首先提出，但 Abel 范畴的公理化体系由 Grothendieck 在文 [39] 中提出，并对其进行了一些本质上的研究及应用，其目的是为了研究代数几何. 概型上的层范畴是 Abel 范畴的一个典型例子. 而三角范畴的概念起源于代数几何上世纪六十年代， Grothendieck 为了阐述概型的 Grothendieck 对偶理论，首次使用了导出范畴的概念 [40], 接着他的学生 Verdier 为了将导出范畴的性质公理化，提出了三角范畴的概念 [116]. Abel 范畴与三角范畴有着紧密的联系. 如：导出范畴是 Abel 范畴的复形范畴的同伦范畴经过局部化得到的三角范畴；自入射代数的模范畴的稳定范畴也是一个三角范畴；由一个三角范畴模去其 cluster- 倾斜子范畴得到的商范畴是一个 Abel 范畴. 如今， Abel 范畴和三角范畴的相关理论已经深入到数学的许多领域，如：代数几何，代数分析，非交换代数几何，表示理论，数学物理等等，并由此产生了许多深刻的结果和富有挑战性的问题.

0.2 三角范畴的 recollement

三角范畴的 recollement 是研究三角范畴的重要工具及研究对象，从几何的角度看，三角范畴的 recollement 可看成是一个“粘合”的过程. 1982 年， Beilinson, Bernstein 和 Deligne 在研究奇异空间和 perverse sheaves 时首先引入三角范畴 recollement 的概念 [10]. 他们给出 recollement 的一个典型例子. 设 X 是一个拓扑空间， U 是 X 的闭子空间， V 是 U 在 X 的补子空间. 则 X 的层的

导出范畴允许有关于 U 的层的导出范畴和 V 的层的导出范畴的 recollement. 现在, Abel 范畴和三角范畴的 recollement 是数学研究的一个基本工具, 在奇异空间几何 [10], 代数表示论 [11, 26, 27, 71], 环论 [71], 多项式函数理论 [80, 106], 拓扑空间理论 [10, 25] 等领域起着重要的作用. 1988 年, Cline, Parshall 和 Scott 将三角范畴 recollemen 的概念应用到代数的研究, 先后给出了三角范畴的 recollement 的两种基本构造:

定理 0.2.1 ([26], Theorem 2.1) 设 $i_*: \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ 是三角范畴的满嵌入函子, 并且有左伴随 i^* 和右伴随 $i^!$, 令 $\varepsilon = \mathrm{Im}(i_*)$. 则 ε 是 $\mathcal{D}$ 的有厚度子范畴, 并且三角范畴 $\mathcal{D}$ 允许有关于三角范畴 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}/\varepsilon$ 的 recollement.

定理 0.2.2 ([27], Theorem 1.1) 设 $j^*: \mathcal{D} \to \mathcal{D}''$ 是三角范畴的正合函子, 并且有满嵌入右伴随 j_* 和满嵌入左伴随 $j_!$. 则三角范畴 $\mathcal{D}$ 允许有关于三角范畴 $\mathrm{Ker}(j^*)$ 和 $\mathcal{D}''$ 的 recollement.

定理 0.2.1 和定理 0.2.2 实质上体现了三角范畴的 recollement 可以看成正合列的推广, 同时三角范畴的 recollement 也相当于范畴的双局部化. CPS 将定理 0.2.2 的结果应用到环的有界导出范畴, 得到了由环的幂等元诱导的 recollement.

定理 0.2.3 ([27], Theorem 2.3) 设 A 是一个环, e 为幂等元, 使得 eAe 有有限整体维数, 令 $B = A/AeA$, 则 $D^b(\mathrm{mod}A)$ 允许有关于 $D^b_{\mathrm{mod}B}(\mathrm{mod}A)$ 及 $D^b(\mathrm{mod}Ae)$ 的 recollement.

特别地, 当 A 是拟遗传代数, 并满足一定条件时 $D^b_{\mathrm{mod}B}(\mathrm{mod}A)$ 等同于 $D^b(\mathrm{mod}B)$. 同时 Parshall 和 Scott 将定理 0.2.1 和定理 0.2.2 应用到有限维代数的有界导出范畴, 引入并系统研究了拟遗传代数 [102]. 拟遗传代数的有界导出范畴的"分层"思想, 为研究复半单李代数及代数群的表示理论中出现的最高权范

畴，从而解决著名的 Lusztig 猜想提供了重要的工具. 随后，拟遗传代数和广义的拟遗传代数即标准 stratified 代数得到深入的研究，成为代数表示论的重要研究分支 [28, 32, 112].

1991 年 Miyachi 对定理 0.2.2 的条件进行了弱化.

定理 0.2.4([94], Proposition 2.7) 设 $j^*: \mathcal{D} \to \mathcal{D}''$ 是三角范畴的正合函子，并且有满嵌入右伴随 j_*(满嵌入左伴随 $j_!$). 若 j^* 还有左伴随 $j_!$(右伴随 j_*), 则左伴随 $j_!$(右伴随 j_*) 也是满嵌入函子. 此时，三角范畴 $\mathcal{D}$ 允许有关于三角范畴 $\mathrm{Ker}(j^*)$ 和 $\mathcal{D}''$ 的 recollement.

同时 Miyachi 得到了三角范畴的局部化和稳定 t- 结构的对应关系，从而得到了三角范畴的 TTF 三元组与三角范畴的 recollement 一一对应 [94].

定理 0.2.5([94]) (1) 设

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}' \arrow[r, "i_*" description] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*" description] & \mathcal{D}'' \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

为三角范畴的一个 recollement. 则 $(\mathcal{U},\mathcal{V}),(\mathcal{V},\mathcal{W})$ 为 $\mathcal{D}$ 中稳定的 t- 结构，其中 $\mathcal{U}=\mathrm{Im}j_!, \mathcal{V}=\mathrm{Im}i_*, \mathcal{W}=\mathrm{Im}j_*$.

(2) 设 $(\mathcal{U},\mathcal{V}),(\mathcal{V},\mathcal{W})$ 为 D 中稳定的 t- 结构，$i_*: \mathcal{V} \to \mathcal{D}$ 为标准嵌入函子. 则存在 recollement

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "i_*" description] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*" description] & \mathcal{D}/\mathcal{V} \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

使得 $\mathrm{Im}j_! = \mathcal{U}$ 和 $\mathrm{Im}j_* = \mathcal{W}$.

此外，Miyachi 还给出了左 Noether 环或半素环的幂等理想诱导 recollement 的充要条件 [92], 并利用偏倾斜复形 $P^{\cdot}$ 诱导了交换环 k 上的投射代数 A 的无界导出范畴 $D(\mathrm{Mod}A)$ 的 recollement [93].

Happel 研究了偏倾斜模与 recollement 的关系，证明了当 A 是整体维数有限的有限维 k- 代数， M 是偏倾斜模且 $\mathrm{End}_A(M) \cong k$ 时，导出范畴 $D^b(\mathrm{mod}A)$ 允许有关于导出范畴 $D^b(\mathrm{mod}A_0)$ 和 $D^b(\mathrm{mod}k)$ 的 recollement, 其中 $\mathrm{mod}A_0$ 等价于 M 的右垂范畴 [45].

为了研究 Noether 概型上的无界稳定导出范畴， Henning Krause 从局部序列出发，讨论了更一般的情形即局部 Noether Grothendieck 范畴 $\mathcal{A}$ 的无界稳定范畴 $S(\mathrm{Mod}\mathcal{A})$, 得到了 recollement

$$\begin{tikzcd} S(\mathrm{Mod}\mathcal{A}) \arrow[r] & K(\mathrm{Inj}\mathcal{A}) \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] \arrow[r] & D(\mathrm{Mod}\mathcal{A}) \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] \end{tikzcd}$$

作为应用，得到了可分离 Noether 概型的拟凝聚层范畴上的零调复形的直积仍为零调复形. 同时他还将与此 recollement 相关的函子用于极大 Cohen-Macaulay 逼近， Tate 上同调的构造及经典的 Grothendieck 对偶扩张的研究 [77].

若三角范畴 $\mathcal{D}$ 允许有关于三角范畴 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}''$ 的 recollement, 这时 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}''$ 一般是不对称的，但是当 $\mathcal{D}$ 有 Serre 函子时， Jørgensen 证明了三角范畴 $\mathcal{D}$ 允许有关于三角范畴 $\mathcal{D}''$ 和 $\mathcal{D}'$ 的 recollement [65]. 陈清华和唐丽丹证明了一个三角范畴的 recollement 幂等完备化以后仍然是三角范畴的 recollement[20]. 林增强用三角范畴的 recollement 诱导了其商范畴的 recollement[86]. 陈小伍构造了与非交换 Gorenstein 射影概型的 Gorenstein 内射对象构成的子范畴的稳定范畴相关的 recollement[22].

最近，Iyama, Kato 和 Miyachi 对具有有界同调的无界复形的同伦范畴及其对有界复形的同伦子范畴作局部化后所得的商范畴进行了研究，利用三角范畴的 recollement 与三角范畴的 TTF 之间的对应关系证明了该商范畴的 recollement 的存在性. 并利用该关系定义了 recollement 三角及研究了 recollement 三角的相关

性质，得到了在同伦范畴为 Iwanaga-Gorenstein 环的有限生成投射模的同伦范畴时，以上商范畴三角等价于 Cohen-Maculay $T_2(R)$- 模范畴的稳定范畴 [59]. Hügel, Koenig 和刘群华研究了环 R 的导出范畴 $D(\mathrm{Mod}R)$ 的 recollement 和倾斜理论的联系，首先从给定的 recollement 构造了倾斜对象，反过来，又从投射维数为 1 的倾斜模构造了 recollement[56].

0.3 Abel 范畴的 recollement

BBD 在研究赋层结构的可构拓扑空间 X 时，定义了 X 层范畴的有界导出范畴 $D^b(X)$ 的满子范畴 perverse 层范畴 $P(X)$, 但作为 $D^b(X)$ 的子范畴，$P(X)$ 中两个等价对象从层的复形上看有非常大的差异，态射的核与余核也比较抽象. 为了用归纳的方法构造 perserse 层范畴，直观地刻画 perverse 层的结构，MacPherson 和 Vilonen 构造了一个 Abel 范畴的 recollement.

定理 0.3.1 ([90], p.405) 设 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 是 Abel 范畴， $F:\mathcal{A}''\to\mathcal{A}'$ 是右正合函子， $G:\mathcal{A}''\to\mathcal{A}'$ 是左正合函子， $\xi:F\to G$ 是自然变换，如下定义范畴 $\mathcal{A}(\xi)$:

$\mathcal{A}(\xi)$ 中的对象是四元组 (X,V,α,β), 其中 $X\in\mathcal{A}''$, $V\in\mathcal{A}'$, $\alpha:F(X)\to V$, $\beta:V\to G(X)$, 且满足 $\xi_X=\beta\alpha$. $\mathcal{A}(\xi)$ 中对象 (X,V,α,β) 到 (X',V',α',β') 的态射是态射对 (f,ϕ), 其中 $f:X\to X'$, $\phi:V\to V'$, 使得下图可交换

$$\begin{array}{ccccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha} & V & \xrightarrow{\beta} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & {\scriptstyle \phi}\downarrow & & {\scriptstyle G(f)}\downarrow \\ F(X') & \xrightarrow{\alpha'} & V' & \xrightarrow{\beta'} & G(X'). \end{array}$$

则 $\mathcal{A}(\xi)$ 是 Abel 范畴，并且 $\mathcal{A}(\xi)$ 允许有关于 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 的 recollement.

三角范畴 recollement 的比较函子为等价函子 ([102], Theorem2.5), 但 Abel

范畴 recollement 的比较函子未必为等价函子, Franjou 和 Pirashvili 为了研究什么样的 recollement 可由 MV- 构造法得到, 给出了 Abel 范畴 recollement 的比较函子为等价函子的充要条件 [42]. 后来他们受到 Friedlander, Suslin 及 Chalupnik 工作的启发, 为了研究对称群的表示及 Schur 代数的关系, 他们用范畴的方法研究了严格多项式函子及凝聚函子, 并用 Abel 范畴的 recollement 来描述这两种范畴的有关主要结果 [43]. 最近林亚南和林增强讨论了单点扩张对模范畴的 recollement 的保持问题 [82], 并从三角范畴的 recollement 出发, 利用 t- 结构的心构造了 Abel 范畴的 recollement[87]. 林亚南和辛林给出 BB- 倾斜模诱导 Abel 范畴的 recollement 的构造, 并给出新的反例说明比较函子不是范畴等价 [85].

0.4 recollement 和 Koenig 定理

作为经典 Morita 理论 [95] 的推广和提升, 导出范畴的 Morita 理论在 Happel, CPS, Rickard 和 Keller 等人的基础上逐渐发展和完善起来 [29, 47, 67, 108, 109, 110]. 特别是 Rickard 定理, 描述了两个环导出范畴三角等价 (简称导出等价) 与倾斜复形之间的对应关系 [108].

定理 0.4.1 ([108], Theorem 6.4) 设 A 和 B 是两个环, 则下列叙述等价:

(1) $D^-(\mathrm{Mod}A)$ 和 $D^-(\mathrm{Mod}B)$ 三角等价;

(2) $D^b(\mathrm{Mod}A)$ 和 $D^b(\mathrm{Mod}B)$ 三角等价;

(3) $K^b(\mathrm{Proj}A)$ 和 $K^b(\mathrm{Proj}B)$ 三角等价;

(4) $K^b(\mathrm{proj}A)$ 和 $K^b(\mathrm{proj}B)$ 三角等价;

(5) $B \cong \mathrm{End}_A(T^\cdot)$, 这里 $T^\cdot \in K^b(\mathrm{proj}A)$ 满足

(i) $\mathrm{Hom}(T^\cdot, T^\cdot[n]) = 0$, 对任意 $n \neq 0$,

(ii) $\mathrm{add}(T^\cdot)$ 生成三角范畴 $K^b(\mathrm{proj}A)$, 其中 $\mathrm{add}(T^\cdot)$ 中每个对象是 $T^\cdot$